carlo.romano.grisanti@unipi.it
pagine.dm.unipi.it/grisanti

ricevimento

Venerdì 15:30 - 18:30 su appuntamento email

Acerbi - Buttazzo
Analisi Matematica ABC

Insiemi numerici

$\mathbb{N}$ numeri naturali
interi positivi
compreso $\emptyset$

$\mathbb{Z}$ numeri interi
positivi e negativi

$\mathbb{Q}$ razionali

"frazioni"

$\frac{p}{q}$ $p, q \in \mathbb{Z}$

$q \neq 0$

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

$\mathbb{R}$ reali

$\mathbb{Q}$ + molto altro

es. $\sqrt{2}$, π, e ....

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

dim : per assurdo
supponiamo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
allora $\exists\, p, q \in \mathbb{N}$
t.c. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

posso supporre
p e q non entrambi
pari

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \quad p^2 = 2q^2$$

quindi p^2 è pari

$\Rightarrow p$ è pari

$\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}$ t.c

$$p = 2m$$

$$\Rightarrow p^2 = 4m^2$$

$$p^2 = 2q^2$$

$$p^2 = 4m^2$$

$$\cancel{2}q^2 = \cancel{4}^{2}m^2$$

$$q^2 = 2m^2$$

$\Rightarrow$ q^2 è pari

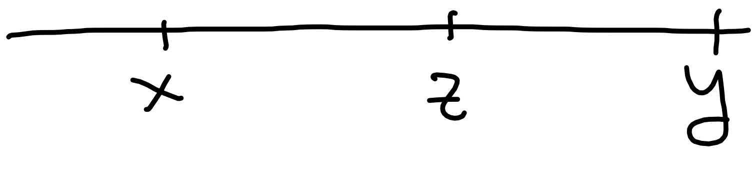
$\Rightarrow$ q è pari

assurdo.

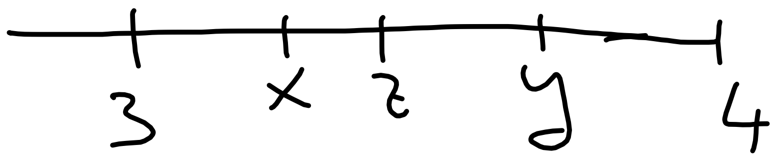
$\Rightarrow$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\square$

Intervalli di $\mathbb{R}$

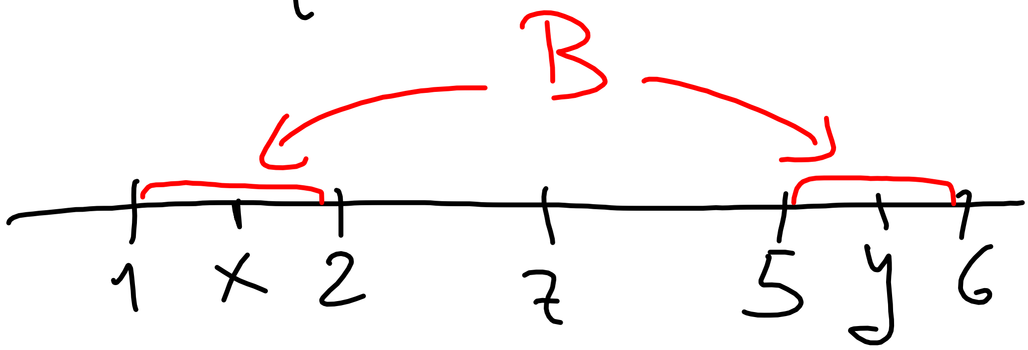
<u>Def</u>: $I \subset \mathbb{R}$ si dice intervallo se $\forall x, y \in I$ con $x < y$, dato $z : x < z < y$ risulta $z \in I$.



$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x \le 4\}$$



$$B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 5 < x \le 6\}$$



$x = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{11}{2}$

$z = 3$ $\qquad$ $x < z < y$

$z \notin B$.

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

non è un intervallo

Notazione

$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

interallo chiuso

$$(a,b) =]a,b[=$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

intervallo aperto

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

semiretta chiusa

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

semiretta aperta

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

$$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

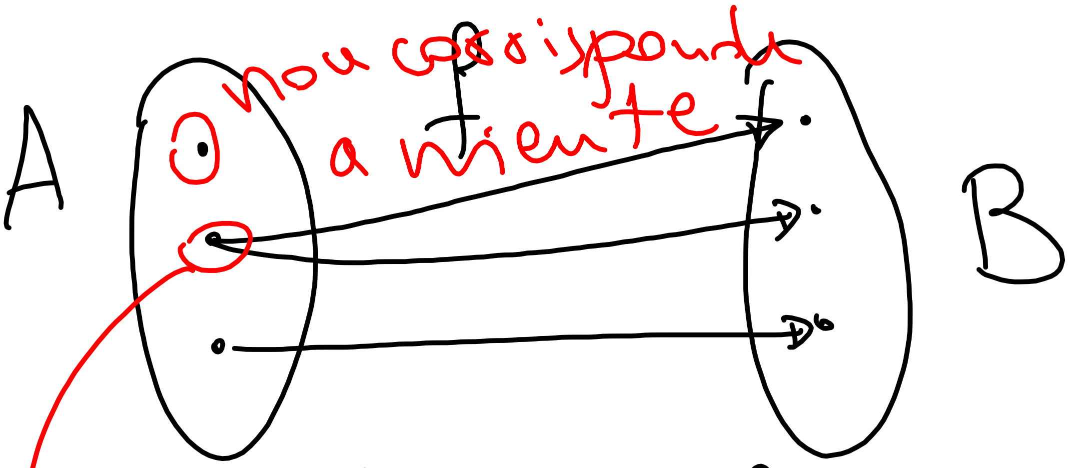
$$\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$$

Funzioni

Terna di ogetti
due insiemi
A = dominio
B = codominio
f legge

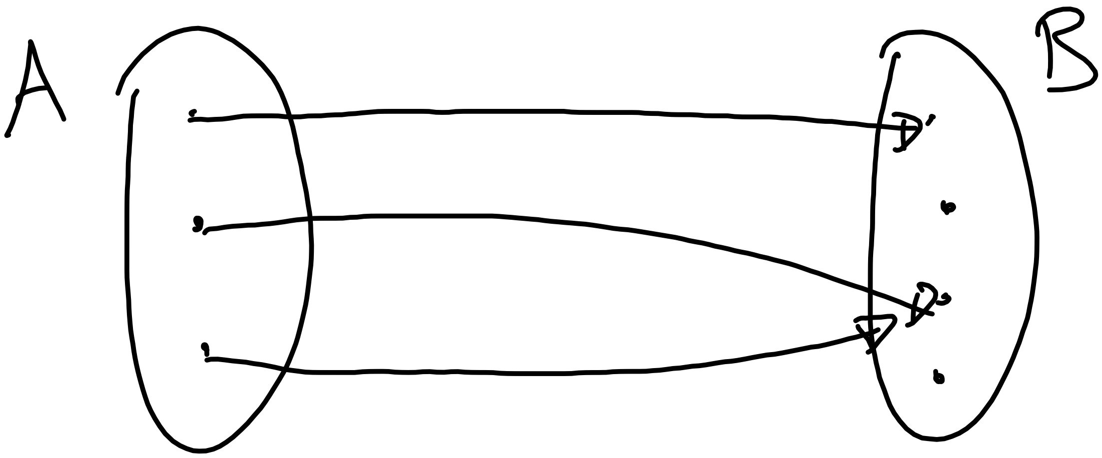
$$f: A \longrightarrow B$$

f mette in corrispond.
ogni elemento di A
con uno e un solo
elemento di B.



non è una funzione

corrisponde a due elementi



è una funzione

Grafico di f

$$\mathrm{graph}(f) = \{(a,b) \in A \times B$$
$$\text{t.c. } b = f(a)\}$$

<u>Es</u>: $A, B = \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x$$

$$(3,6) \in \mathrm{graph}(f)$$

$$6 = f(3) = 2 \cdot 3$$

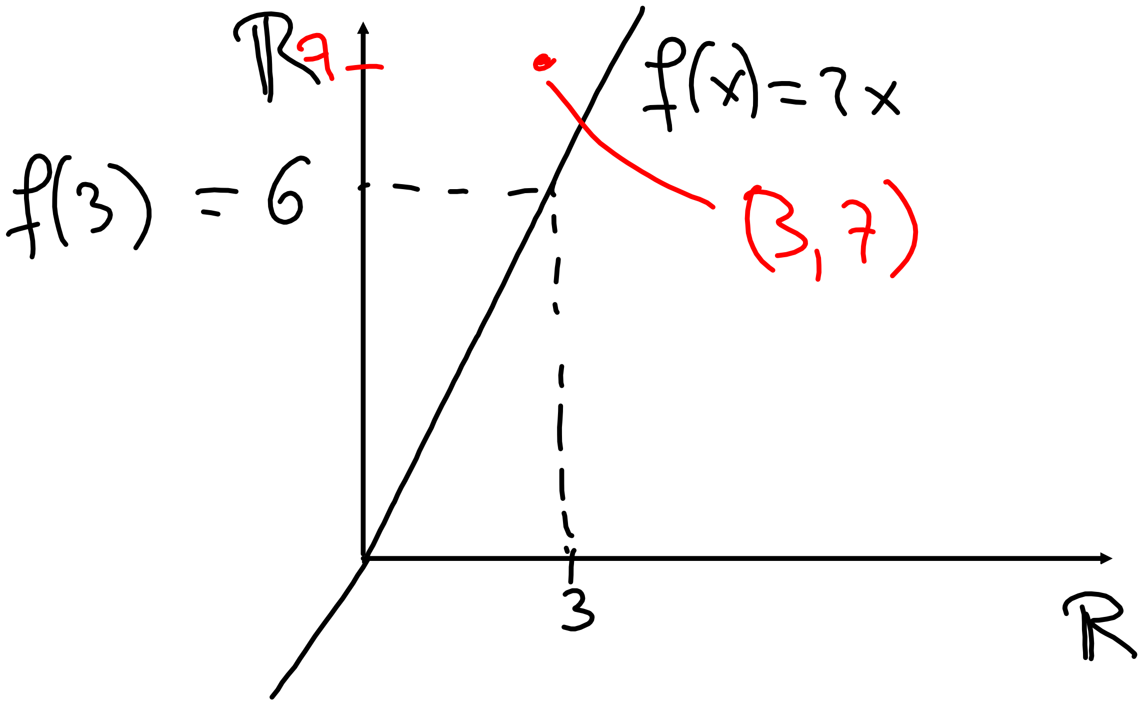
$$(3,7) \notin \mathrm{graph}(f)$$

$$7 \neq f(3) = 6$$

$A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

piano Euclideo



Def: $f: A \to B$

$D \subset A$

$f(D) = \{ f(a) : a \in D \}$

si dice immagine di D attraverso f

$f(D) \subset B$

Es: $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$D = [1,3]$

$f(D) = [1,9]$

$Imm(f) = f(A)$

Immagine di f

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$Imm(f) = [0, +\infty)$

Def: $f: A \to B$

si dice **iniettiva**

se $\forall\, a_1, a_2 \in A$ con

$a_1 \neq a_2$ risulta

$$f(a_1) \neq f(a_2)$$

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2$$

$$a_1 = -3 \quad , \quad a_2 = 3$$

$$f(a_1) = 9 = f(a_2)$$

non è iniettiva

$$g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = x^2$$

g è iniettiva

Def: $f: A \to B$ si dice surgettiva se $\forall b \in B \; \exists a \in A$ t.c. $f(a) = b$

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

non è surgettiva

$b = -4$

$\nexists a \in \mathbb{R} : a^2 = -4$

Oss: $f: A \to B$ è surgettiva se e solo se

$$\mathrm{Imm}(f) = B$$

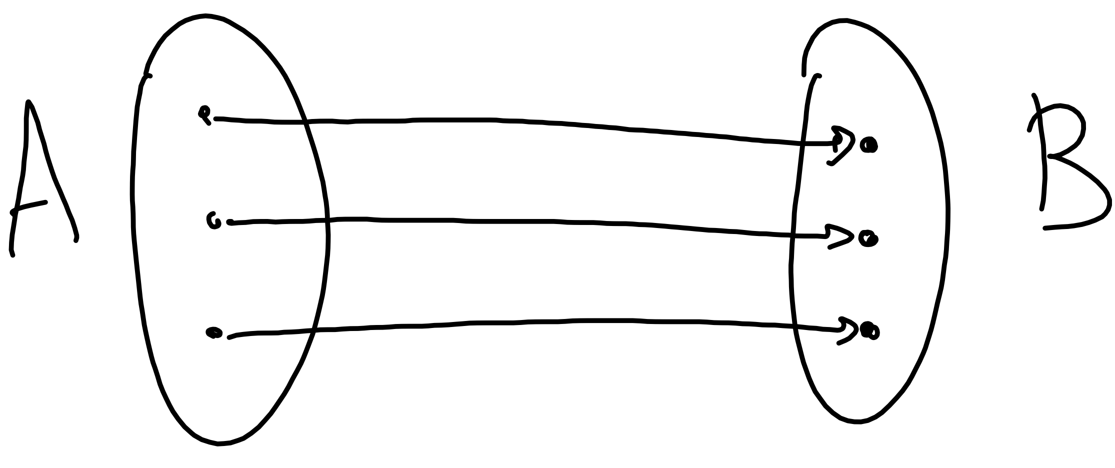
Es: $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

$f(x) = x^2$

è surgettiva.

Def: $f: A \to B$

se è f è sia iniettiva che surgettiva si dice biunivoca o invertibile.



Posso costruire
la funzione inversa

$f^{-1} : B \longrightarrow A$

$f^{-1}(b) = a$ se e solo
se $f(a) = b$

esiste almeno un $a \in A$
perché f è surgettiva
ne esiste solo uno
perché f è iniettiva

Es: $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$f(x) = x^2$

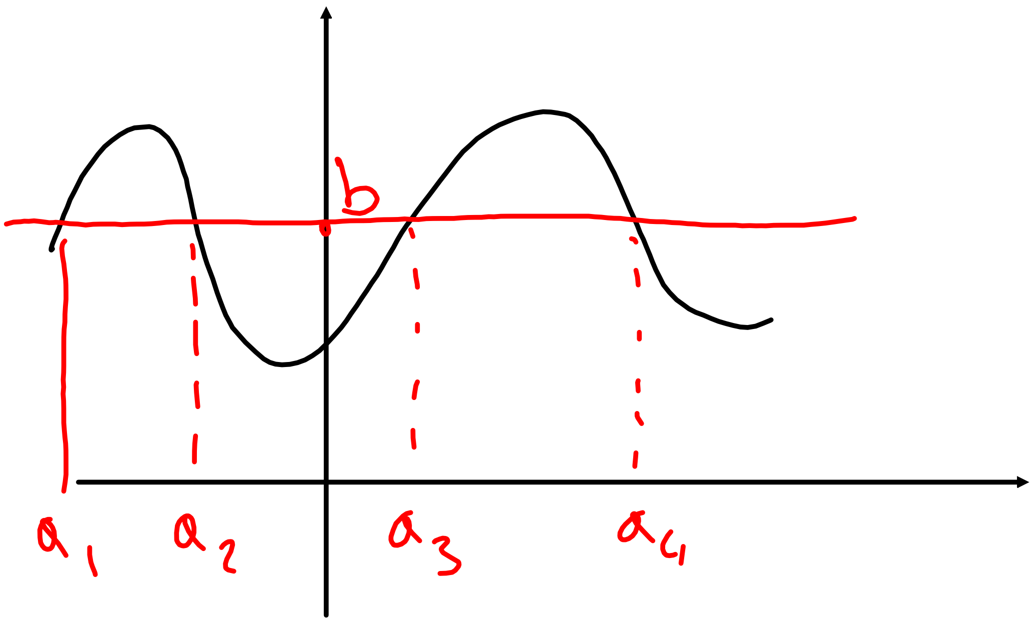
è invertibile.

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$f^{-1}: [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{x} \geq 0$ sempre



$f(a_1) = f(a_2) = \dots f(a_4) = b$

f non è iniettiva

Trovare l'inversa.

$$f(x) = 3x + 2$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

scrivo

$$y = 3x + 2$$

risolvo in x

$$y - 2 = 3x$$

$$\frac{y-2}{3} = x$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x+2) =$$

$$\frac{(3x+2) - 2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

$$f^{-1} \circ f = Id = \text{identità}$$

$$\mathrm{Id}: A \longrightarrow A$$

$$\mathrm{Id}(x) = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

Funzioni monotòne

<u>Def</u>: $A, B \subset \mathbb{R}$

Se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ risulta

1) $f(x_1) < f(x_2)$
f si dice strettamente crescente

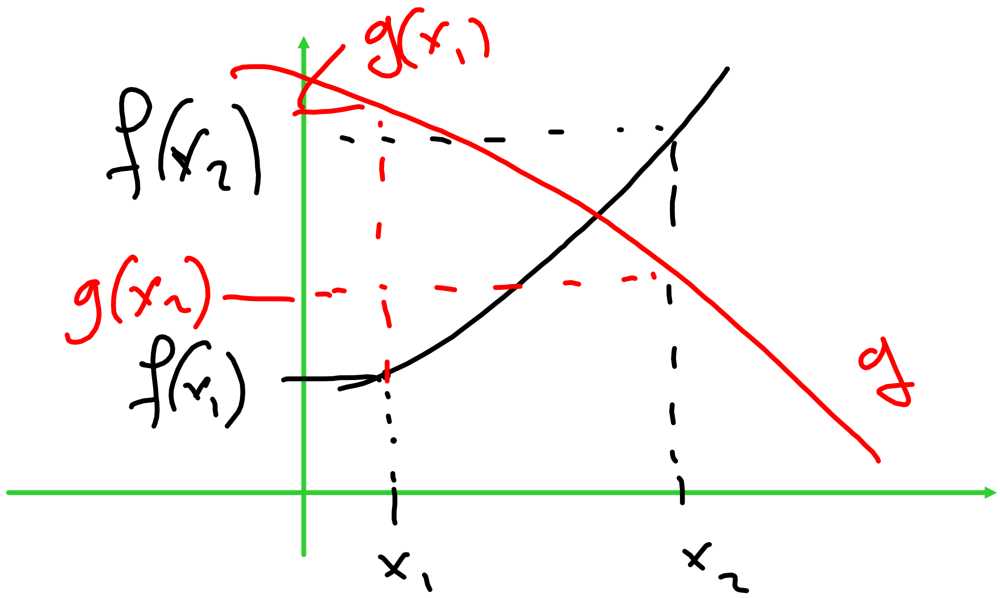
2) $f(x_1) \leq f(x_2)$ f si dice debolmente crescente

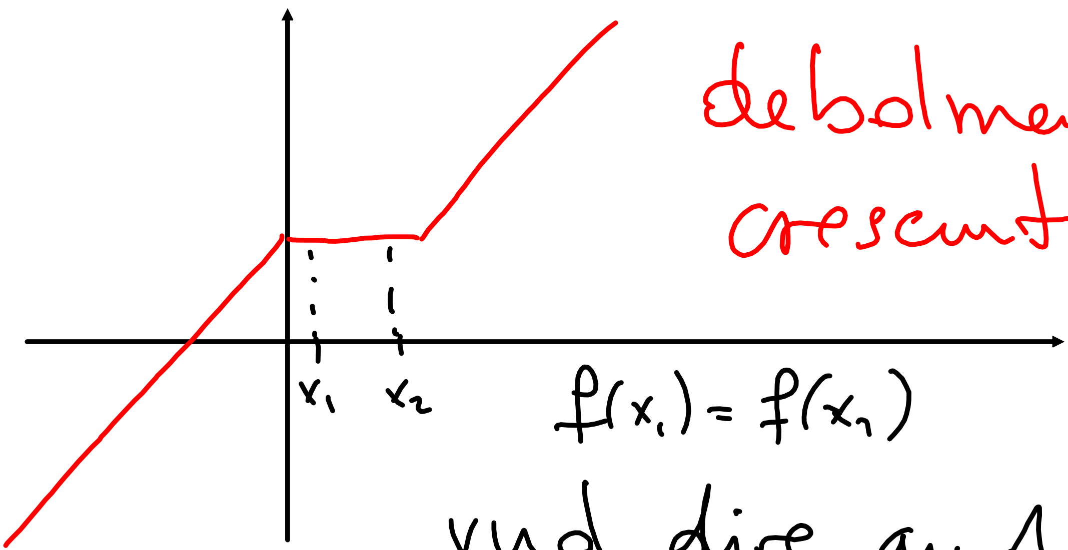
3) $f(x_1) > f(x_2)$
strettamente decrescente

4) $f(x_1) \geq f(x_2)$
debolmente decrescente

Se si verificano 1) o 3) f si dice strettamente monotòna

Se si verificano 2) o 4) debolmente monotòna


g(x1)
f(x2)
g(x2)
f(x1)
g
x1
x2



debolmente crescente.

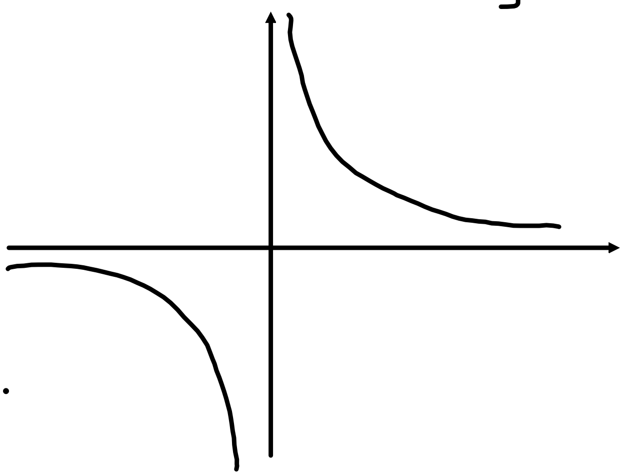
$f(x_1) = f(x_2)$

vuol dire anche

$f(x_1) \leq f(x_2)$

Es : $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{1}{x}$



f è stretti. decresc. in $(-\infty, 0)$

f è stretti. decresc. in $(0, +\infty)$

f è decrescente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

NO infatti

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 3 \qquad x_1 < x_2$

$f(x_1) = \frac{1}{-1} = -1 \qquad f(x_2) = \frac{1}{3}$

$f(x_1) < f(x_2)$

Composizione di funzioni monotone.

Prop: $A, B, C \subset \mathbb{R}$

$f : A \to B \qquad g : B \to C$

Allora

1) Se f è crescente e g è crescente $\Rightarrow g \circ f$ è cresc.

2) Se f ē cresente e g
ē decresente $\Rightarrow$ $g \circ f$ ē decr.
(e viceversa)
3) Se f ē decresente e
g ē decresente $\Rightarrow$ $g \circ f$ ē cresc.

$\underline{\text{Es}}$: $h(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{arctg} x$

$g(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad g(t) = e^{t}$

$$h = g \circ f$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & \operatorname{arctg} x \arrow[r, "g"] & e^{\operatorname{arctg} x} \end{tikzcd}$$

f e g sono cerscenti

$\Rightarrow$ h è crescente.